

向量组

线性表示

- 向量B可用 a_1, a_2, \dots, a_s 表示
 - 方程组 $AX=B$ 有解, 即B可用A的列向量组线性表示
 - 注意是列向量组
- 向量组之间的线性表示
 - 向量组 b_1, b_2, \dots, b_t 可用 a_1, a_2, \dots, a_s 表示
 - 与矩阵乘法密切相关, AB的列向量组可用A的列向量组线性表示, 行向量组可用B的行向量组线性表示
 - 具有传递性
- 两个向量组等价
 - 可互相表示
 - 具有传递性

线性相关性 (刻画向量组的内在关系)

- 概念
 - 意义
 - 存在 (不存在) 内在的线性表示关系
 - 向量组内是否存在向量可由其他向量线性表示
 - 定义
 - 存在 (不存在) 不全为0的数组 c_1, c_2, \dots, c_s 使得 $c_1a_1 + \dots + c_s a_s = 0$, 线性相关 (无关)
 - 齐次方程组 $(a_1, a_2, \dots, a_s)X=0$ 有 (没有) 非零解
 - 一个向量 a (个数 $s=1$) 线性相关 $a=0$
 - 两个向量相关
 - 它们的分量对应成比例
 - 性质
 - 线性无关向量组的每个部分组都无关
 - 若向量的个数 s 等于维数 n , 则有: a_1, a_2, \dots, a_n 线性相关 $|a_1, a_2, \dots, a_n|=0$
 - 当向量的个数 s 大于维数 n 时, a_1, a_2, \dots, a_s 一定线性相关
 - 与线性表示的关系
 - 如果 a_1, a_2, \dots, a_s 线性无关, 则: a_1, a_2, \dots, a_s, B 线性相 (无) 关 $\rightarrow B$ (不) 可用 a_1, a_2, \dots, a_s 线性表示
 - 如果B可用 a_1, a_2, \dots, a_s 线性表示, 则: 表示方法唯一 $\rightarrow a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关

两个角度的看待

向量组的秩和最大无关组 (刻画向量组相关程度)

- 概念
 - 线性无关部分组包含向量个数的最大值
 - 用秩判断线性相关性
 - a_1, a_2, \dots, a_s 无关 $\rightarrow r(a_1, a_2, \dots, a_s)=s$
 - 线性无关则满秩
 - B可用 a_1, a_2, \dots, a_s 线性表示 $\rightarrow r(a_1, a_2, \dots, a_s, B)=r(a_1, a_2, \dots, a_s)$
 - 若 $r=s$, 则可被唯一线性表示, 即a为极大无关组, 线性无关
 - 用秩判断线性表示
 - a_1, a_2, \dots, a_s 与 b_1, b_2, \dots, b_t 等价 $\rightarrow r(a_1, a_2, \dots, a_s)=r(a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_t)=r(b_1, b_2, \dots, b_t)$
 - 秩相等是向量组等价的必要条件, 非充分条件, 还要能互相表示才行
 - 若 b_1, b_2, \dots, b_t 可用 a_1, a_2, \dots, a_s 线性表示, 则 $r(b) \leq r(a)$
 - 推论: 若 $t > s$, 则 b_1, b_2, \dots, b_t 线性相关

秩和最大无关组的计算

- 当A经过初等行变换化为B时, $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解, 则A的列向量组和B的列向量组有相同的线性关系
 - 最大无关组对应, 秩相等
- 计算秩及最大无关组的方法
 - 1 把此向量作为列向量构造矩阵 (a_1, a_2, \dots, a_s)
 - 2 用初等行变换把它化为阶梯形矩阵B
 - B的非0行数即为r
 - B的各台角所在列号对应的部分组即为 a_1, a_2, \dots, a_s 的一个最大无关组
 - 3 继续作初等行变换化为简单阶梯形矩阵, 则可将其他向量用极大无关组表示出来
 - 4 注意: 求矩阵最大无关组时不能作初等列变换!
- 基础解系

秩的两个性质

- $r(a_1, \dots, a_s, B)$
 - $r(a_1, \dots, a_s)$, 当B可用 a_1, a_2, \dots, a_s 线性表示
 - $r(a_1, \dots, a_s)+1$, 当B不可用 a_1, \dots, a_s 线性表示
- b_1, b_2, \dots, b_t 可用 a_1, a_2, \dots, a_s 线性表示 $\rightarrow r(b_1, \dots, b_t) \leq r(a_1, \dots, a_s)$

矩阵的秩

- 定义
 - $r(A)=A$ 的列 (行) 向量组的秩=A是非0子式阶数的最大值
 - n 阶矩阵满秩 $\rightarrow r(A)=n \rightarrow A$ 的列 (行) 向量组无关 $\rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow A$ 可逆
- 计算
 - 初等变换保持矩阵的秩不变
 - 阶梯形矩阵的秩=非0行数
 - 即可用初等 (行或列均可) 变换将其化为阶梯形矩阵, 则此阶梯形矩阵的非0行数就是原矩阵的秩
- 性质
 - $r(A^T)=r(A)$
 - 如果 $c \neq 0$, 则 $r(cA)=r(A)$
 - $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$
 - $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
 - 如果A列满秩, 则 $r(AB)=r(B)$; 如果B行满秩, 则 $r(AB)=r(A)$
 - 如果 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B) \leq n$, n 为A的列数 (B的行数)
 - 设 A^* 为 n 阶矩阵A的伴随矩阵
 - $r(A)=n \rightarrow r(A^*)=n$
 - $r(A)=n-1 \rightarrow r(A^*)=1$
 - $r(A) < n-1 \rightarrow r(A^*)=0$
- 矩阵的等价
 - 两个矩阵如果可用初等变换互相转化, 就称它们等价
 - 充要条件: 类型相同 (即行、列数对应相等), 并且秩相等

实向量的内积和正交矩阵

- 定义
 - $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \rightarrow (\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \alpha^T \beta$
- 性质
 - 正定性
 - $(\alpha, \alpha) \geq 0$, and $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
 - 对称性
 - $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
 - 双线性性质
 - $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \alpha_2)$
 - $(c\alpha_1, \beta) = c(\alpha_1, \beta) = (c, \beta)$
- 实向量的长度
 - $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}, \|\alpha\| \geq 0 \text{ and } \|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
 - $\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|$
 - $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$, 单位向量, α 的单位化
 - $(\alpha, \beta) = 0$, 则 α, β 正交
 - 如果向量组中的每一个都是单位向量, 且两两正交, 则称它们是单位正交向量组
 - 施密特正交化
- 正交矩阵
 - 定义
 - n 阶矩阵Q称为正交矩阵, 如果它是实矩阵, 且有 $QQ^T = E (Q^{-1} = Q^T)$
 - 定理
 - Q的列向量组是单位正交向量组
 - Q的行向量组是单位正交向量组
 - 施密特正交化
 - 把线性无关向量组改造为单位正交向量组的方法
 - 具体操作过程请自己看书!

向量空间 (仅数一)

- 加法和数乘封闭运算
- 基, 维数, 坐标
 - 非0子空间的秩为维数, 记作 $\dim V$, 称V的排了次序的极大无关组为V的基
 - $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是V的一个基, V的每一个元素 α 可用该基唯一线性表示:
 $\alpha = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_n\eta_n$, 则系数 c_1, c_2, \dots, c_n 为 α 关于 η_1, \dots, η_n 的坐标
 - 定义
 - 两个向量的坐标等于它们的坐标的和
 - 向量的数乘等于坐标乘此数
 - 线性性质
 - V中的一个向量组 a_1, \dots, a_t 关于某个基的坐标为 y_1, \dots, y_t , 则 a_1, \dots, a_t 和 y_1, \dots, y_t 有相同的线性关系
 - 意义
 - 可以用坐标来判断向量组的相关性, 计算秩和最大无关组等
- 过渡矩阵, 坐标变换公式
 - $x=Cy$ 具体看书, 不好表述
 - 如果V的一个基 η_1, \dots, η_n 是单位正交向量组, 则称为规范正交基
 - 规范正交基
 - 两个向量的内积等于在规范正交基下的它们坐标的内积
 - 两个规范正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵

应用与联系

- $AX=b$ 有解
 - b可用A的列向量组线性表示
 - $r(A|b)=r(A)$
- $AX=0$ 有解
 - B的列向量组可用A的列向量组线性表示
 - $r(A|B)=r(A)$
- n 是 $AX=0$ 的解
 - n可用 $AX=0$ 的基础解系线性表示
- $AX=0$ 只有0解
 - A列向量组线性无关
 - A列满秩
- $AX=0$ 的基础解系即其解集合的极大无关组

By得位移法得天下, Q:2675937472